8.4.4 Využití limit posloupností

Př. 1: Rozhodni zda platí věta: „Je-li posloupnost omezená, pak je konvergentní.“ Pokud věta neplatí, najdi protipříklad. Pokud věta platí, zkus zdůvodnit proč.

Př. 2: Rozhodni zda platí věta: „Je-li posloupnost neklesající (nerostoucí), pak je konvergentní.“ Pokud věta neplatí, najdi protipříklad. Pokud věta platí, zkus zdůvodnit proč.

Př. 3: Zkus na základě předchozích dvou příkladů navrhnout, které vlastnosti by posloupnost měla najednou splňovat, aby byla konvergentní.

Př. 4: Urči vlastnosti posloupností $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ a $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Co z těchto vlastností vyplývá?

Př. 5: Doplň do druhého sloupce důkaz pro posloupnost $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$.

Př. 6: Proč je třeba v předchozích úvahách pracovat s tím, že posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a posloupnost $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí a není možné používat názornější označení posloupností $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ jako rostoucí a $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ jako klesající? Argumentuj pomocí hodnoty $\sqrt{2}$ na 25 desetinných míst $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887$.

Př. 7: Jedna z nejdůležitějších matematických konstant je dána jako limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Zjisti, o kterou matematickou konstantu jde.

Př. 8: Daleko rychleji než postupem z úvodu hodiny je možné získat hodnotu odmocniny z kladného čísla *a* takto:
Nejprve zvolíme kladné číslo x_1 jehož druhá mocnina je větší než *a*. Pak platí: $\frac{a}{x_1} < \sqrt{a} < x_1$. Odmocnina z *a* je pak limita rekurentně dané posloupnosti

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right).$$

a) Urči tolik prvních členů posloupnosti, abys určil hodnotu $\sqrt{2}$ s přesností na pět desetinných míst.
b) Vypočti pomocí tohoto algoritmu $\sqrt{7}$ a $\sqrt{0{,}3}$ na tři desetinná místa.
c) Dokaž platnost tohoto postupu (předpokládej, že posloupnost $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, poté využij rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$).

Př. 9: Hodnota čísla π byla původně určována pomocí vztahu mezi obvodem kružnice a obvodem pravidelných *n*-úhelníků, které jsou této kružnici opsány a vepsány.

a) Odhadni velikost čísla π pomocí čtyřúhelníků.
b) Najdi vzorce pro n-tý člen obou posloupností (využij goniometrické funkce) a zjistit, kolikaúhelníky musíme použít, abychom určili hodnotu čísla π na dvě desetinná čísla.
c) Vyjádří přesnou hodnotu π jako společné limity obou posloupností.